新聞紙面で掲載した例題についてさらに深く掘り下げてみよう

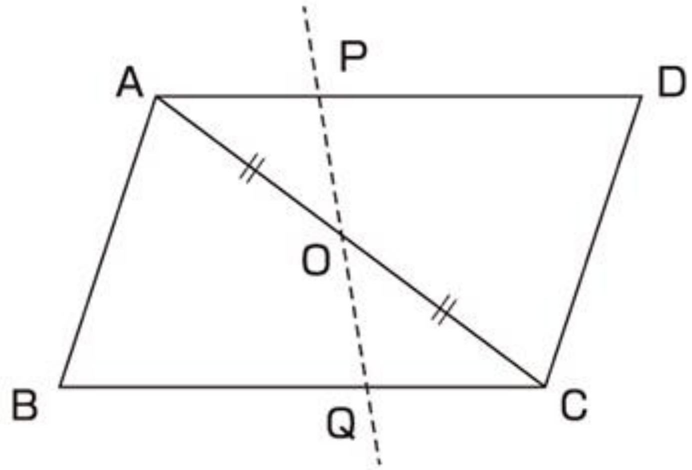
平行四辺形の面積を２等分

[point]平行四辺形の面積を２等分する直線は対角線の中点を通る

平行四辺形は、対角線によって２つの合同な三角形に分かれる。つまり、対角線によって平行線の面積は２等分される。さて、その対角線の中点を通る直線だとなぜ平行四辺形の面積を２等分するのだろうか。ここに三角形の合同が活躍する。

平行四辺形 ABCD の対角線の中点を O として，O を通る直線 l が辺 AD、辺 BC と交わる点をそれぞれ P，Q とする(図３)。前のポイントによると、このとき台形 ABQP と台形 PQCD の面積が等しくなるということなのだ。

図３



ここで、△AOP と△COQ において，

仮定より AO＝CO･･･①

対頂角は等しいから∠AOP＝∠COQ･･･②

AD∥BC より錯角は等しいから∠PAO＝QCO･･･③

①②③より１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△AOP≡△COQ

合同な三角形の面積は等しいから、△AOP と△COQ の面積は等しい。

よって、

△ABC＝四角形 ABQO＋△COQ

＝四角形 ABQO＋△AOP

＝台形 ABQP

となる。

△ABC の面積は平行四辺形 ABCD の面積の半分だから、台形 ABQP の面積も平行四辺形の面積の半分である。

O(平行四辺形の対角線の中点)を通るすべての直線について同様のことがいえるので、平行四辺形の対角線の中点を通る直線は、平行四辺形の面積を 2 等分することが確かめられた。

座標平面上で直交する２つの直線の傾きの関係（発展研究１）

例題の解説では、正方形の直角を用いて、補助線を引くことにより合同な直角三角形をつくり、必要な座標を出した。ここで、座標平面上の直角と直線の傾きについて深く考察してみよう。

図４

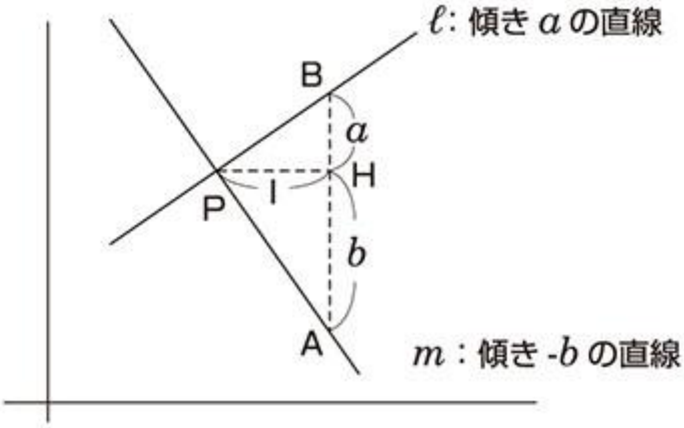


図４を見て頂きたい。直線 ℓ は傾きが a の直線、直線 m は傾きが－b の直線だ。この２つの直線が直交しているとき、傾きの関係はどうなるのかを、今度は直角三角形の相似を用いて考察してみよう。２直線の交点を P とし，P から x 軸に平行な長さ１の線分 PH を引く。次に, H を通り y 軸に平行な直線を引き直線 l，直線 m と交わる点をそれぞれ B，A とする。ここで△PAH と△BPH は相似になるから，PH：BH＝AH：PH が成り立つ。よって、1：a＝b：1 より ab＝1 となる。つまり、a×(－b)＝－1 だから、２つの傾きの積は－1 となる。

これをまとめると、｢直交する２直線の傾きの積は－1 となる。｣ということだ。

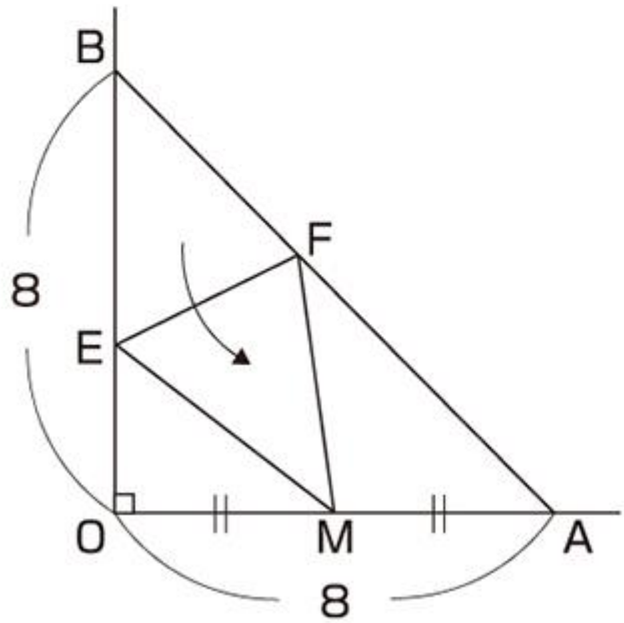
この知識を身につけると便利な点もあるが、注意するべきことがある。それは、これを公式として覚えているだけではいけないということだ。大切なことは上記のように、なぜそのようになるのかという点をきちんとおさえることなのだ。何を知っているかではなく、なぜそのようなことが成り立つのかということの方が何十倍も価値がある。それは、上記のように、あるひとつのことから、派生する事柄について深く考察していく流れを確認すれば明らかであろう。入試直前になると、安直な結果やとりあえず便利なものに手を伸ばすだけになりがちだが、そうではなく、本質を追う姿勢を忘れないで頂きたい。このような姿勢は、入試だけでなく、高校に進学してからの伸長に大きく寄与する。

図形から関数へ（発展研究２）

新聞紙面の本稿にて、関数の問題を図形的な要素に視点をおいて解くことのポイントを述べた。そして、その逆もある。つまり、"純粋な図形の問題に、関数の要素を持ち込む"ということだ。一例として、上記の「直交する２直線の傾きは－1 になる」ことを利用する問題を紹介しよう。

（例題）

図５



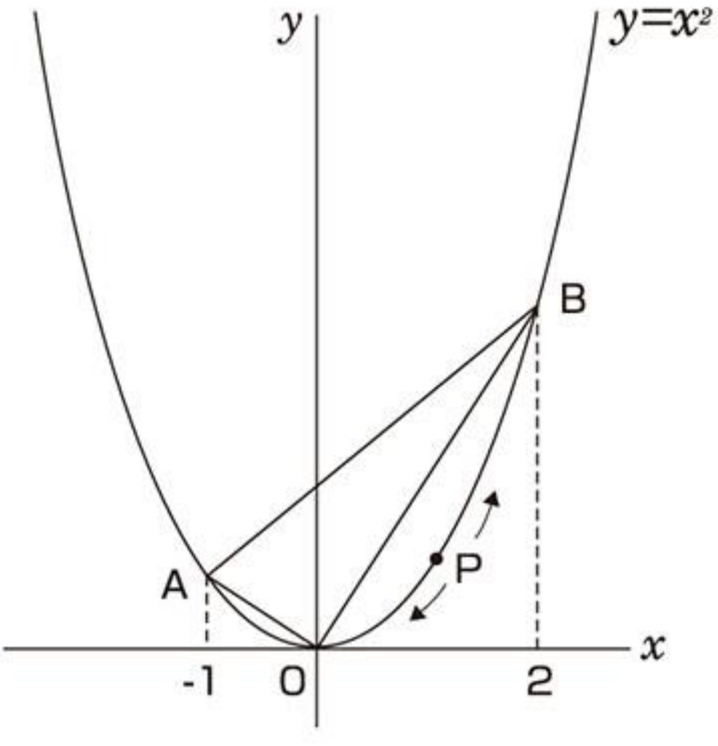
右図のように，OA=OB=8，∠AOB＝90°の直角二等辺三角形を，頂点 B が辺 OA の中点 M に重なるように折り，折り目と辺 OB が交わる点を E，折り目と辺 AB が交わる点を F とするとき，EF の長さを求めなさい。

ある三角形を特定の面積にする－平行線と等積変形の利用

座標平面上の三角形や四角形の面積を扱う問題も多い。典型的な一例を挙げてポイントを押さえていく。受験生のみなさんは、まずは自分の力で解いてみて欲しい。その上で解説を確認して頂きたい。

（例題）

図８



右図のように，関数 $y = x^2$ のグラフ上に２点 A，B がある。それらの x 座標はそれぞれ－1，２である。直線 AB と y 軸の交点を C とする。 このとき次の問に答えなさい。

(1) 関数 $y = x^2$ のグラフ上のＯからＢの間(ＯとＢは含まない)に点Ｐをとる。△AOB と△APB の面積が等しくなるとき，点Ｐの座標を求めなさい。

(2) 関数 $y = x^2$ のグラフ上のｘ座標が負の部分に点Ｑをとる。△AOB と△AOQ の面積が等しくなるとき，点Ｑの座標を求めなさい。

(3) 関数 $y = x^2$ のグラフ上のｘ座標が正の部分に点Ｒをとる。△ABR の面積が△AOB の面積の２倍となるとき，点Ｒの座標を求めなさい。